Početní část 1 - 7.6.2022

1. Uvažme 2π-periodickou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou pro $x \in (-\pi, \pi]$ předpisem $f(x) = (x+\pi)^2$.

   (a) Rozviňte f v trigonometrickou Fourierovu řadu s periodou 2π.

   (b) Vyšetřete bodovou a (lokálně) stejnoměrnou konverganci této řady.

   (c) Dokažte (napríklad pomocí Parsevalovy rovnosti), že

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}.$$

   Můžete využít známou řadu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   (10 bodů)

   Řešení:

   Nejdříve spočítáme

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi)^2 \sin nx \; dx \\
&= \left[-\frac{(x+\pi)^2 \cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n} \int_{-\pi}^{\pi} (x+\pi) \cos nx \; dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1} 4\pi^2}{n} + \left[\frac{2(x+\pi) \sin nx}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx \\
&= \frac{(-1)^{n+1} 4\pi^2}{n}.
\end{aligned}$$

   analogicky pro $n \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{(-1)^n 4\pi}{n^2}$$

   a nakonec

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \left[\frac{(x+\pi)^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{8\pi^3}{3}.$$

   Celkově tedy dostáváme Fourierovu řadu ve tvaru

$$\begin{aligned}
f(x) &\sim \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{8\pi^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^{n+1} 4\pi^2}{n} \sin nx + \frac{(-1)^n 4\pi}{n^2} \cos nx \right) \\
&= \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} 4\pi}{n} \sin nx + \frac{(-1)^n 4}{n^2} \cos nx \right)
\end{aligned}$$

Funkce f je po částech hladká a jediné body nespojitosti jsou $\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, řada tedy konverguje bodově k $f(x)$ na intervalech $(-\pi, \pi)+2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, a na těchto intervalech konverguje i lokálně stejnoměrně. V bodech $\pi+2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, konverguje k průměru jednostranných limit, tedy k hodnotě $2\pi^2$.

Parsevalova rovnost nám dává

$$\frac{32}{5}\pi^4 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi^3}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(-1)^{n+1}4\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{(-1)^n 4}{n^2}\right)^2\right)$$

Což po úpravě dává

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

odkud už snadno dopočítáme hledaný součet.

2. V prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ uvažme distribuci δ_π (Diracovu distribuci v bodě π).

   (a) Spočtěte δ'_π a δ''_π a Fourierovu transformaci δ_π a δ'_π,

   (b) vyjádřete distribuci $\cos x \cdot (\delta_\pi + \delta'_\pi)$ jako lineární kombinaci derivací δ_π,

   (c) spočtěte Fourierovu transformaci distribuce $\cos x \cdot (\delta_\pi + \delta'_\pi)$ a dokažte, že je to regulární distribuce.

   (8 bodů)

Řešení:

Platí

$$\langle \delta'_\pi, \varphi \rangle = \langle \delta_\pi, -\varphi' \rangle = -\varphi'(\pi)$$

a obdobně $\langle \delta''_\pi, \varphi \rangle = \varphi''(\pi)$. Odtud

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\delta_\pi), \varphi \rangle &= \langle \delta_\pi, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \\ &= \mathcal{F}(\varphi)(\pi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-i2\pi x \cdot \pi} \, dx \quad =: \langle T_{e^{-i2\pi^2 x}}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

a obdobně

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(\delta'_\pi), \varphi \rangle &= \langle \delta'_\pi, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \\ &= -\mathcal{F}'(\varphi)(\pi) \\ &= -\mathcal{F}(-i2\pi x \varphi(x)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} i2\pi x \varphi(x) e^{-i2\pi x \cdot \pi} \, dx \\ &=: \langle T_{i2\pi x e^{-i2\pi^2 x}}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} \langle \cos x \cdot (\delta_\pi + \delta'_\pi), \varphi \rangle &= \langle \delta_\pi, \cos x \cdot \varphi \rangle + \langle \delta'_\pi, \cos x \cdot \varphi\varphi \rangle \\ &= \cos \pi \cdot \varphi(\pi) - (\cos x \cdot \varphi(x))'|_{x=\pi} \\ &= -\varphi(\pi) + \sin \pi \cdot \varphi(\pi) - \cos \pi \cdot \varphi'(\pi) \\ &= -\varphi(\pi) + \varphi'(\pi) \end{aligned}$$

Tedy $\cos x \cdot (\delta_\pi + \delta'_\pi) = -\delta_\pi - \delta'_\pi$.

Nakonec

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\cos x \cdot (\delta_\pi + \delta'_\pi)) &= \mathcal{F}(-\delta_\pi - \delta'_\pi) \\ &= -\mathcal{F}(\delta_\pi) - \mathcal{F}(\delta'_\pi) \\ &= -T_{e^{-i2\pi^2 x}} - T_{i2\pi x e^{-i2\pi^2 x}} \\ &= T_{-(1+i2\pi x)e^{-i2\pi^2 x}}. \end{aligned}$$

Distribuce $\mathcal{F}(\cos x \cdot (\delta_\pi + \delta'_\pi))$ je tedy regulární distribuce odpovídající funkci $-(1 + i2\pi x)e^{-i2\pi^2 x}$.